# 1 Annonce du résultat

Nous allons prouver les trois résultats suivants :

1. $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$,

2. $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$, et

3. $\sin(\pi z) = \pi z \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$.

# 2 Lemme crucial

## 2.1 Enoncé et justification

A deux reprises dans les calculs qui vont suivre on va avoir besoin d'évaluer, pour $y$ tendant vers $+\infty$, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2}$. On remarque :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{ds}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2}\end{aligned} \tag{1}$$

ce qui va permettre, par monotonie en $s$ de l'intégrande, d'évaluer la somme
:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{n^2}{y^2}} = y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2}$$

par une comparaison série-intégrale. Plus précisément, on obtiendra l'encadrement
:

$$0 \leq \frac{\pi}{2y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2} \leq \frac{1}{y^2}.$$

## 2.2 Preuve

Par décroissance on obtient, pour $n-1 \leq s \leq n$, l'encadrement :

$$\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n}{y})^2} \leq \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2} \leq \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n-1}{y})^2}$$

puis en intégrant de $n-1$ à $n$ :

$$\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n}{y})^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\frac{ds}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2} \leq \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n-1}{y})^2}$$

ensuite en sommant de $n = 1$ à $+\infty$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n}{y})^2} \leq \int_{0}^{+\infty} \frac{\frac{ds}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2}$$

et en sommant de $n = 2$ à $+\infty$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n}{y})^2} \geq \int_{1}^{+\infty} \frac{\frac{ds}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2}$$

ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{0}^{+\infty} \frac{\frac{ds}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n}{y})^2} &\leq \int_{0}^{1} \frac{\frac{ds}{y}}{1+(\frac{s}{y})^2} \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{n}{y})^2} &\leq \arctan(\frac{1}{y}) \qquad (2) \\ 0 \leq \frac{\pi}{2y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2} &\leq \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

# 3 Notations, holomorphies, convergences

## 3.1 Les membres de gauche

Posons :

1. $f_1(z) = \sin(\pi z)$ sur $\mathbb{C}$,
2. $f_2(z) = \pi \cot(\pi z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et
3. $f_3(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Ca définit trois fonctions holomorphes, et on a $f_2 = \frac{f_1'}{f_1}$ et $f_3 = -f_2'$.

## 3.2 Les membres de droite

On a la domination évidente $|-\frac{z^2}{n^2}| \leq \frac{R^2}{n^2}$. On peut donc poser :

$$g_1(z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

et ça définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec convergence normale sur tout compact. De plus, en posant $g_2 = \frac{g_1'}{g_1}$, on a :

$$g_2(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

avec convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. En remarquant $\frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}$, on obtient l'expression alternative :

$$g_2(z) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n}$$

avec convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. Enfin posons $g_3 = -g_2'$, on obtient l'expression suivante :

$$g_3(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

avec toujours convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

# 4 Réduction à $f_3 = g_3$

Supposons prouvé $f_3 = g_3$. On a alors $f_2 = g_2 + C$ avec $C \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f_2(iy) &= \pi \cot(iy) \\ &= -i\pi \coth(y) \end{aligned} \tag{3}$$

donc $\lim\limits_{y \to +\infty} f_2(iy) = -i\pi$. Ensuite on fait :

$$\begin{aligned} g_2(iy) &= \frac{1}{iy} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2iy}{-y^2 - n^2} \\ &= \frac{1}{i}\left(\frac{1}{y} + 2y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

par le lemme on trouve :

$$-\frac{1}{y} \leq \pi - ig_2(iy) \leq \frac{1}{y}$$

et on conclut $\lim\limits_{y \to +\infty} g_2(iy) = -i\pi$, puis $C = 0$, et enfin $g_2 = f_2$. On en déduit $\frac{g_1'}{g_1} = \frac{f_1'}{f_1}$, donc $f_1 = Bg_1$, avec $B \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = B \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$, et avec $z = 0$ on obtient $B = 1$ et donc $f_1 = g_1$.

# 5 Preuve de $f_3 = g_3$

## 5.1 Plan de preuve

On sait déjà que les deux membres sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dans un premier temps on prouve qu'ils ont la même partie singulière, de sorte à avoir que leur différence est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour faire ça on va simplement prouver qu'ils sont tous les deux 1-périodiques et faire une étude en 0. Dans un second temps on va prouver que leur différence est bornée, donc constante, et que cette différence est nulle. Pour faire ça on va prouver que les deux tendent vers 0 quand $y$ tend vers l'infini uniformément en $x$, ce qui prouvera la borne quand on s'éloigne des pôles (la borne proche des pôles étant donnée par la 1-périodicité), et la nullité de la constante.

## 5.2 Le premier temps

La 1-périodicité de $f_3$ est claire, et celle de $g_3$ est un simple changement d'indice :

$$\begin{aligned}
g_3(z+1) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+1-n)^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-(n-1))^2} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-p)^2} \\
&= g_3(z).
\end{aligned} \tag{5}$$

La partie singulière de $g_3$ au voisinage de 0 est clairement $\frac{1}{z^2}$, et celle de $f_3$ est un simple développement limité :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\pi^2}{(\pi z + O(z^3))^2} \\
&= \frac{1}{z^2} \frac{1}{(1+O(z^2))^2} \\
&= \frac{1}{z^2} + O(1).
\end{aligned} \tag{6}$$

## 5.3 Le second temps

### 5.3.1 Pour $f_3$

Si on écrit $z = x + iy$, on a :

$$
\begin{aligned}
|\sin(\pi z)|^2 &= \frac{e^{-\pi y}e^{i\pi x} - e^{\pi y}e^{-i\pi x}}{2i}\frac{e^{-\pi y}e^{-i\pi x} - e^{\pi y}e^{i\pi x}}{-2i} \\
&= \frac{e^{-2\pi y} - e^{2i\pi x} - e^{-2i\pi x} + e^{2\pi y}}{4} \\
&= \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) \quad \text{en faisant } -2+2
\end{aligned} \tag{7}
$$

d'où $|f_3(z)| = \frac{\pi^2}{\cosh^2(\pi y)-\cos^2(\pi x)}$, et donc, si $|y| > 0$ :

$$|f_3(z)| \leq \frac{\pi^2}{\cosh^2(\pi y) - 1}$$

ce qui donne que $f_3$ tend uniformément en $x$ vers 0 quand $y$ tend vers l'infini.

### 5.3.2 Pour $g_3$

Un simple changement d'indice donne que $g_3$ est paire :

$$
\begin{aligned}
g_3(-z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(-z-n)^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-p)^2} \\
&= g_3(z)
\end{aligned} \tag{8}
$$

Soit $x \in [0,1]$ et $y > 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
|g_3(x+iy)| &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \\
&\leq \sum_{n\leq 0} \frac{1}{n^2+y^2} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)^2+y^2} \\
&= 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+y^2} \\
&\leq \frac{\pi}{y}
\end{aligned} \tag{9}
$$

ce qui donne que $g_3$ tend vers 0 uniformément en $x$ quand $y$ tend vers $\infty$, par 1-périodicité et parité.

### 5.4 Conclusion

$f_3 - g_3$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car $f_3$ et $g_3$ on la même partie singulière en tous leurs pôles. Elle est 1-périodique et continue (car holomorphe !), donc bornée dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$, et en dehors de cette bande $f_3$ est bornée par $\frac{\pi^2}{\cosh(\pi)-1}$ et $g_3$ par $2+\pi$, donc $f_3 - g_3$ est bornée, puis constante. Enfin $f_3$ et $g_3$ tendent vers 0 quand $\mathrm{Im}(z)$ tend vers l'infini, donc $f_3 - g_3$ tend vers 0, donc vaut 0, et donc $f_3 = g_3$.

## 6 Application : calcul de $\zeta(2)$

Un développement limité donne :

$$\begin{aligned}
f_3(z) &= \frac{\pi^2}{(\pi z - \frac{\pi^3}{3!} z^3 + O(z^5))^2} \\
&= \frac{1}{z^2} \frac{1}{(1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + O(z^4))^2} \\
&= \frac{1}{z^2} (1 + 2\frac{\pi^2}{6} z^2 + O(z^4)) \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + O(z^2)
\end{aligned} \tag{10}$$

et la convergence normale donne la continuité en 0 de la partie non singulière :

$$\begin{aligned}
g_3(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(0-n)^2} \\
&= \frac{1}{z^2} + 2\zeta(2)
\end{aligned} \tag{11}$$

ce qui donne en identifiant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ !